UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT (Arrêté du 7 août 2006)

Date prévue pour la soutenance......30 novembre 2012 N° d'étudiant |9|0|6|2|2|8|0|0|

Nom et Prénom de
l'auteur : ....**JABRANE**.........**Saïd**..

Titre de la thèse : ***H-principe, visualisation et applications***............

Résumé de la thèse :

L'objectif de cette thèse est le développement d'un programme permettant la visualisation de certaines surfaces célèbres dont il n'existe aucune image : les plongements isométriques des tores carrés plats dans l'espace euclidien de dimension trois E3 . Ces plongements isométriques ont été découverts par Nash et Kuiper en 1954-1955 et ont surpris la communauté
mathématique par leur existence et par leur régularité inhabituelle : celle-ci est seulement de classe C 1 en général.
La méthode de Nash et Kuiper, en dépit de son caractère constructif, ne fournit pas de procédé suffisamment explicite pour permettre de représenter ces plongements. Elle ne se prête donc pas à une visualisation. Mais la donne change avec Gromov. Ce dernier revisite les travaux de Nash-Kuiper et en extrait une méthode, l'intégration convexe qui généralise et éclaire leur démarche. Avec cette méthode, les idées sous-jacentes aux démonstrations de Nash et Kuiper deviennent plus accessibles et plus compréhensibles. En particulier, une visualisation de plongements isométriques de surfaces dans l'espace euclidien E3 devient possible à condition de transformer cette méthode en algorithme, d'adapter et de simplifier la théorie au cas particulier des tores. C'est ce que nous avons réalisé dans ce présent travail de thèse pour le tore carré plat.

Trois parties forment cette thèse :

1. La partie mathématique. (Chapitre I, II et III)

Il s'agit de développer une version explicite de la théorie de l'intégration convexe (qui est un outil pour démontrer des h-principes) afin de permettre son implémentation.
La première phase de cette partie consiste en l'adaptation des diverses étapes de la construction de Gromov-Nash-Kuiper en vue de leur implémentation. Les difficultés se sont concentrées autour de deux lemmes cruciaux. Le premier de ces lemmes est le lemme fondamental du h-principe 1-dimensionnel. Il s'agit de construire explicitement une famille de lacets permettant la mise en œuvre de l'intégration convexe. Le

second lemme porte le nom de théorème d'étape : le programme doit appliquer un grand nombre de fois le lemme fondamental du h-principe 1-dimensionnel dans trois directions différentes. Ceci constitue une simplification importante de la démonstration de Nash-Kuiper, où le nombre de directions n'est pas fixé et peut être très grand. Fixer ce nombre de directions à son minimum possible–c'est-à-dire trois–permet non seulement de simplifier la démonstration mais également de faciliter considérablement l'implémentation.
La phase suivante de cette partie mathématique est le contrôle des erreurs. En effet, afin de pouvoir appliquer récursivement l'intégration convexe, il est impératif de produire des solutions dont on contrôle à chaque étape le degré d'approximation. Il faut donc produire une version quantitative explicite des approximations réalisées par l'intégration convexe.

2. La partie algorithmique. (Chapitre IV)

Elle présente les étapes principales de l'algorithme général permettant de construire grâce à l'intégration convexe une suite d'immersions convergeant vers une immersion isométrique du tore carré plat et C 0 -proche d'une immersion initiale donnée du tore carré

3. La partie informatique. (Chapitre V et VI)

La partie informatique consiste en l'implémentation de l'algorithme mis en place dans la partie précédente puis en la production d'images. Nous décrivons la manière dont les applications continues sont codées au moyen de grilles discrètes ainsi que le choix de la méthode d'interpolation surfacique mise en oeuvre. Nous expliquons comment est calculé numériquement le flot du champ de vecteurs des directions d'intégration Wk,j nécessaire pour chaque corrugation. L'intégration convexe discrétisée est décrite dans les paragraphes 5.3 et 5.4. Le choix de l'immersion initiale est discuté au paragraphe 5.5. Nous expliquons dans le paragraphe 5.6 comment choisir le paramètre principal du processus, c'est-à-dire le nombre d'oscillations. Nous terminons ce chapitre V par une étude numérique locale de la croissance des nombres d'oscillations. Au vue des contraintes informatiques (espace mémoire, taille des grilles 10 000 × 10 000 et 20 000 × 100 000) des calculs locaux ont été effectués sur un petit domaine du tore. Les images obtenues sont présentées au chapitre VI.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet Hévéa réunissant les trois laboratoires suivants : ICJ (Institut Camille Jordan), LJK (Laboratoire Jean Kuntzmann) et Gipsa-Lab spécialisés en mathématiques, mathématiques appliquées et informatique. En effet, la représentation d'un tore carré plat dans l'espace tridimensionnel est une problématique de mathématiques pures, mais le caractère algorithmique de la construction est de nature plus informatique et les problèmes numériques liés aux calculs sont du ressort des mathématiques appliquées.